**MATRIKS TRANSFORMASI**

1. **TRANSFORMASI**

Transformasi digunakan untuk untuk memindahkan suatu titik atau bangun pada suatu bidang. Transformasi geometri adalah bagian dari geometri yang membahas tentang perubahan (letak,bentuk , penyajian) yang didasarkan dengan gambar dan matriks.

1. **Transformasi pada bidang**

Transformasi pada bidang terdiri dari 4 macam :

1. *Pergeseran (Translasi)*

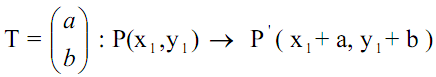
 Perpindahan titik-titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu yang diwakili oleh ruas garis berarah (vector) atau dengan suatu pasangan bilangan.



misal



Translasi memetakan titik P(x1 ,y1 ) ke titik P '( x1 + a, y1 + b ) yang

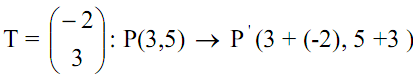
dinotasikan dengan :

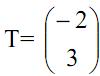
contoh:



Bayangan titik P(3,5) oleh translasi adalah ….

Jawab :





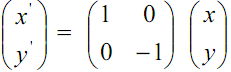
Jadi, bayangan titik P(3,5) oleh translasi adalah (1, 8)

1. *Pencerminan (Refleksi)*

Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin.

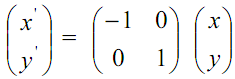
1. Pencerminan terhadap sumbu X (dilambangkan dengan )

Mx : P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(x, -y)

Persamaan matriksnya :

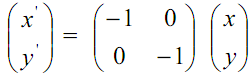
1. Pencerminan terhadap sumbu Y (dilambangkan dengan )

: P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(-x, y)

 Persamaan matriksnya :

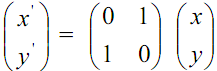
1. Pencerminan terhadap titik asal O(0,0) (dilambangkan dengan )

: P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(-x, -y)

 Persamaan matriksnya :

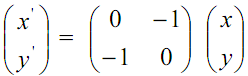
1. Pencerminan terhadap garis y = x (dilambangkan dengan )

: P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(y, x)

Persamaan matriksnya :

1. Pencerminan terhadap garis y = -x (dilambangkan dengan)

: P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(-y, -x)

 Persamaan matriksnya :

1. Pencerminan terhadap garis x = h (dilambangkan dengan )

= : P(x,y) → P '(x ', y ') = P '(2h – x , y)

1. Pencerminan terhadap garis y = k dilambangkan dengan)

= : P(x,y) → P '(x ', y ') = P '( x , 2k - y)

1. Pencerminan terhadap titik (a,b) (dilambangkan dengan )

: P(x,y) → P '(x ', y ') = P '( 2a-x, 2b - y)

1. *Perputaran (Rotasi)*

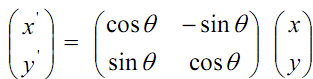
Transformasi yang memindahkan titik-titik dengan memutar titik-titik tersebut sejauh θ terhadap suatu titik pusat rotasi.

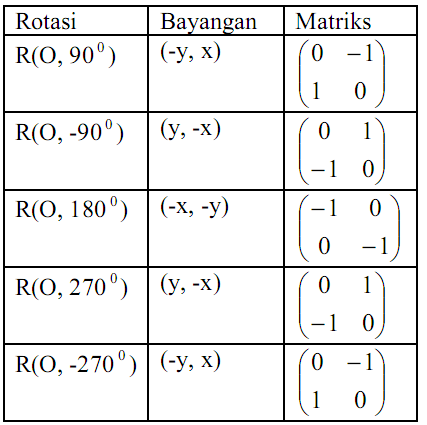
Suatu rotasi dengan pusat P dan sudut rotasi θ dinotasikan dengan R (P, θ ).

1). Rotasi terhadap titik pusat O(0,0) (dilambangkan dengan R(O, θ )

Jika titik P(x,y) diputar sebesar θ belawanan arah jam. Terhadap titik pusat O(0,0), maka diperoleh bayangan P '(x ', y ').

R(O, θ ): P(x,y)→ P(x, y) = P(x cosθ - y sinθ , x sinθ + y cos θ )

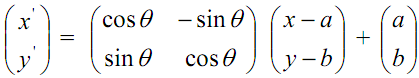
Persamaan matriknya:

untuk dengan memasukkan nilai θ tersebut didapat table sbb:

2). Rotasi terhadap titik pusat P(a, b) (dilambangkan dengan R(O, θ )

Jika suatu titik P (x,y) diputar sejauh θ berlawanan dengan arah jam terhadap titik pusat A(a,b) maka bayangannya adalah P ' (x ', y ') dengan

x ' - a = (x –a) cosθ - (y-b) sinθ y '- b = (x – a) sin θ + (y- b) cos θ

 Persamaan matriknya:

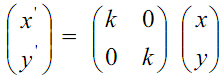
1. *Perkalian atau Dilatasi*

Transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan factor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu.

Perkalian atau dilatasi ini ditentukan oleh factor skala (k) dan pusat dilatasi.

1). Dilatasi terhadap titik pusat O(0,0) Pemetaannya:

[O, k] : P(x,y) → P '(kx, ky)

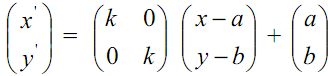
persamaan matriksnya :

2). Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)

Titik P(x,y) dilatasi terhadap titik pusat A (a,b) dengan factor skala k, didapat bayangan P '( x ', y ') dengan:

x ' - a = k(x - a) dan y '- b = k (y - b)

Persamaan matriksnya :



1. **Konsep Dasar Transformasi**

Berdasarkan pengertian transformasi yang telah dijelaskan di atas, maka terdapat beberapa konsep dasar yang dibutuhkan untuk melakukan proses transformasi pada sebuah obyek grafik itu. Adapun Konsep dasar yang dimaksudkan tersebut diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Konsep Matriks transformasi 2D

Matriks transformasi adalah matriks yang membuat sebuah obyek grafik mengalami perubahan baik berupa perubahan posisi maupun perubahan ukuran daripada obyek grafik tersebut. Untuk dua dimensi, matriks transformasi dinyatakan dalam ukuran 3 x 3 dengan kolom ke 3 dipakai sebagai tempat penyedia untuk proses transformasi (translasi, scaling, atau rotasi).Bentuk matriks transformasi 2D

1. Konsep struktur data titik dua dimensi
2. Konsep struktur data vector
3. Konsep struktur data matriks 3 x 3
4. Konsep fungsi pemindah tipe data

Suatu obyek grafik dibangun atas titik-titik. Dalam konsep transformasi, setiap obyek grafik yang dikenai proses transformasi maka setiap tipe data titik pembangun obyek grafik tersebut perlu dikonversikan terlebih dahulu ke tipe data vektor. Hal ini dimaksudkan untuk memudahkan dalam menghitung vektor menggunakan konsep matriks. Selanjutnya, setelah perhitungan vektor menggunakan konsep matriks selesai, hasil perhitungan tipe data vektor tersebut dikonversikan kembali ke tipe data titik.

**B. Matriks**

Matriks adalah suatu kumpulan besaran (variabel dan konstanta) yang dapat dirujuk melalui indeknya, yang menyatakan posisinya dalam representasi umum yang digunakan, yaitu sebuah tabel persegipanjang. Matriks merupakan suatu cara visualisasi variabel yang merupakan kumpulan dari angka-angka atau variabel lain, misalnya vektor. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur. Pemanfaatannya misalnya dalam menjelaskan persamaan linier, transformasi koordinat, dan lainnya. Matriks seperti halnya variabel biasa dapat dimanipulasi, seperti dikalikan, dijumlah, dikurangkan dan didekomposisikan.

A =
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
\end{bmatrix}
\!

1. Penjumlahan dan pengurangan matriks

a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}\!Penjumlahan dan pengurangan matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks memiliki ukuran atau tipe yang sama. Elemen-elemen yang dijumlahkan atau dikurangi adalah elemen yang posisi atau letaknya sama.

\begin{bmatrix}
{3} & {4} \\
{6} & {5} \\

\end{bmatrix}
\!atau dalam representasi dekoratfinya

\begin{bmatrix}
(a_{11} \pm b_{11}) & (a_{12} \pm b_{12}) & (a_{13} \pm b_{13}) \\
(a_{21} \pm b_{21}) & (a_{22} \pm b_{22}) & (a_{23} \pm b_{23}) \\
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & c_{13} \\
c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
\end{bmatrix}
\!

1. Perkalian Skalar

Matriks dapat dikalikan dengan sebuah skalar.

\lambda\cdot A := (\lambda\cdot a_{ij})_{i=1, \ldots , m; \ j=1, \ldots , n}

5 \cdot
  \begin{pmatrix}
    1 & -3 & 2 \\
    1 &  2 & 7
  \end{pmatrix}
  =
  \begin{pmatrix}
   5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\
   5 \cdot 1 & 5 \cdot   2  & 5 \cdot 7
  \end{pmatrix}
  =
  \begin{pmatrix}
    5 & -15 & 10 \\
    5 & 10  & 35
  \end{pmatrix}Contoh perhitungan :

1. Perkalian matriks

Matriks dapat dikalikan, dengan cara tiap baris dikalikan dengan tiap kolom, lalu dijumlahkan pada baris yang sama.

 c_{ij}=\sum_{k=1}^m a_{ik}\cdot b_{kj}

Contoh perhitungan :

  \begin{pmatrix}
    1 & 2 & 3 \\
    4 & 5 & 6 \\
  \end{pmatrix}
  \cdot
  \begin{pmatrix}
    6 & -1 \\
    3 & 2 \\
    0 & -3
  \end{pmatrix}
  =
  \begin{pmatrix}
     1 \cdot 6  +  2 \cdot 3  +  3 \cdot 0 &
     1 \cdot (-1) +  2 \cdot 2 +  3 \cdot (-3) \\
     4 \cdot 6  +  5 \cdot 3  +  6 \cdot 0 &
     4 \cdot (-1) +  5 \cdot 2 +  6 \cdot (-3) \\
  \end{pmatrix}
  =
  \begin{pmatrix}
    12 & -6 \\
    39 & -12
  \end{pmatrix}

### Matriks Transformasi

### Transformasi-transformasi di atas (rotasi, refleksi, dilatasi, dan geseran) dapat dilambangkan dengan matriks. Untuk mencari bayangan (hasil transformasi) dari sebuah titik, kita kalikan matriks transformasinya dengan kolom vektor yang merupakan koordinat dari titik tersebut.

### Matriks-matriks transformasinya adalah sebagai berikut:

|  |  |
| --- | --- |
| Type of transformation | Transformation matrix |
| Rotasi searah jarum jam dengan sudut putar *θ* dengan pusat O(0,0). |  |
| Rotasi anti arah jarum jam dengan sudut putar *θ* dengan pusat O(0,0). |  |
| Refleksi (pencerminan) terhadap sumbu *x*. |  |
| Refleksi (pencerminan) terhadap sumbu *y*. |  |
| Dilatasi dengan pusat O(0,0) dan faktor skala *k*. |  |
| Geseran horisontal (sejajar dengan sumbu *x*) dengan faktor *m*. |  |
| Geseran horisontal (sejajar dengan sumbu *y*) dengan faktor *m*. |  |

*Contoh:*

Putar titik A (2,3) searah jarum jam dengan pusat O(0,0) dan sudut putar 90°.

Cerminkan titik A (-3,4) terhadap sumbu *x*

1. Matriks Transformasi dan Koordinat Homogen

* Kombinasi bentuk perkalian dan translasi untuk transformasi geometri 2D ke  
  dalam suatu matriks dilakukan dengan mengubah matriks 2 x 2 menjadi  
  matriks 3 x 3.
* Untuk itu maka koordinat cartesian (x,y) dinyatakan dalam bentuk koordinat  
  homogen (xh, yh, h), dimana :  
  x = xh / h y = yh / h
* Dimana untuk geometri 2D parameter h ≠ 0 atau biasanya h = 1, sehingga  
  setiap posisi koordinat 2D dapat dinyatakan dengan (x, y, 1).
* Untuk transformasi 3D biasanya parameter h ≠ 1.
* Dengan menyatakan posisi titik dalam koordinat homogen, semua transformasi  
  geometri dinyatakan dalam bentuk matriks.
* Koordinat dinyatakan dalam tiga elemen vektor kolom dan operasi transformasi  
  ditulis dengan matriks 3 x 3.

1.  Transformasi oleh suatu Matriks**.**

Suatu titik A (x,y) ditransformasikan oleh matriks menjadi A ' ( x ' , y ' ).

Hubungan di atas dapat dituliskan dalam persamaan matriks:



Contoh:

Hasil transformasi matriks terhadap titik B(2, -3) adalah…

Jawab :





Jadi B ' adalah (-8, -9)

1. Komposisi Transformasi dengan Matriks

 Jika T1 adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks dan T 2 adalah

transformasi yang bersesuaian dengan matriks maka komposisi transformasi :

1. T 2 o T1 adalah perkalian matriks M 2 . M1



1. T1 o T 2 adalah perkalian matriks M1. M 2



1. Luas daerah bangun hasil transformasi



Jika matriks transformasi mentransformasikan bangun A menjadi bangun A ' ,maka :

Luas Bangun A ' = |det T | x Luas bangun A

|det T | dinamakan factor perbesaran luas, merupakan nilai mutlak determinan matriks T.

| det T | = |ad – bc|

Contoh soal:

Diketahui segitiga ABC dengan koordinat A(1,1), B(1,5), C(6,1). Berapa luas bayangan segitiga ABC oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks

Jawab:



diketahui Δ ABC : Alas = AC = 5 ; tinggi = AB=4

Luas Δ ABC = x alas x tinggi = x AC x AB

= . 5 . 4 = 10 satuan luas



Δ ABC ditransformasikan yang bersesuaian dengan matriks

Misal matriks ini adalah T, maka:

|det T | = |1 .2 – 3(-2) | = |2 + 6| = 8

Luas bayangan Δ ABC = |det T | x Luas ΔABC

= 8 x 10

= 80 satuan luas

Tabel macam-macam Transformasi dan matriksnya :

